

Inference at * 1 1 0
of proof for Lemma equiv_rel_functionality_wrt_iff:

```

1. T : Type
2. T' : Type
3. E : T → T → ℙ
4. E' : T' → T' → ℙ
5. T = T'
6. ∀x, y:T. E(x,y) ⇔ E'(x,y)
⊢ ((∀a:T. E(a,a))
  & (∀a, b:T. E(a,b) ⇒ E(b,a))
  & (∀a, b, c:T. E(a,b) ⇒ E(b,c) ⇒ E(a,c)))
⇔ ((∀a:T'. E'(a,a))
   & (∀a, b:T'. E'(a,b) ⇒ E'(b,a))
   & (∀a, b, c:T'. E'(a,b) ⇒ E'(b,c) ⇒ E'(a,c)))
by PERMUTE{1:n,
            2:n,
            3:n,
            3:n,
            4:n,
            5:n,
            6:n,
            7:n,
            8:n,
            8:n,
            9:n,
            10:n,
            11:n,
            12:n,
            12:n,
            8:n,
            13:n,
            14:n,
            15:n,
            16:n,
            8:n,
            8:n,
            17:n,
            18:n,
            11:n,
            19:n,
            19:n,
            20:n,
            21:n,

```

22:n,
23:n,
24:n,
25:n,
26:n,
27:n,
28:n,
28:n,
27:n,
19:n,
8:n,
8:n,
8:n,
29:n,
30:n,
11:n,
19:n,
19:n,
31:n,
32:n,
22:n,
33:n,
33:n,
34:n,
35:n,
36:n,
37:n,
38:n,
39:n,
40:n,
41:n,
42:n,
43:n,
44:n,
45:n,
46:n,
42:n,
47:n,
41:n,
47:n,
33:n,
19:n,
8:n,
48:n,
49:n}

1:wf..... NILNIL

$\vdash ((\forall a:T. E(a,a))$
 $\& (\forall a, b:T. E(a,b) \Rightarrow E(b,a))$
 $\& (\forall a, b, c:T. E(a,b) \Rightarrow E(b,c) \Rightarrow E(a,c)))$
 $\in \mathbb{P}$

2:wf..... NILNIL

$\vdash ((\forall a:T. E'(a,a))$
 $\& (\forall a, b:T. E'(a,b) \Rightarrow E'(b,a))$
 $\& (\forall a, b, c:T. E'(a,b) \Rightarrow E'(b,c) \Rightarrow E'(a,c)))$
 $\in \mathbb{P}$

3:wf..... NILNIL

$\vdash ((\forall a:T'. E'(a,a))$
 $\& (\forall a, b:T'. E'(a,b) \Rightarrow E'(b,a))$
 $\& (\forall a, b, c:T'. E'(a,b) \Rightarrow E'(b,c) \Rightarrow E'(a,c)))$
 $\in \mathbb{P}$

4:wf..... NILNIL

$\vdash (\forall a:T. E(a,a)) \in \mathbb{P}$

5:wf..... NILNIL

$\vdash (\forall a:T. E'(a,a)) \in \mathbb{P}$

6:wf..... NILNIL

$\vdash ((\forall a, b:T. E(a,b) \Rightarrow E(b,a)) \& (\forall a, b, c:T. E(a,b) \Rightarrow E(b,c) \Rightarrow E(a,c))) \in \mathbb{P}$

7:wf..... NILNIL

$\vdash ((\forall a, b:T. E'(a,b) \Rightarrow E'(b,a)) \& (\forall a, b, c:T. E'(a,b) \Rightarrow E'(b,c) \Rightarrow E'(a,c))) \in \mathbb{P}$

8:wf..... NILNIL

$\vdash T \in \text{Type}$

9:wf..... NILNIL

$\vdash (\lambda a.E(a,a)) \in T \rightarrow \mathbb{P}$

10:wf..... NILNIL

$\vdash (\lambda a.E'(a,a)) \in T \rightarrow \mathbb{P}$

11:wf..... NILNIL

$\vdash T = T$

12:wf..... NILNIL

7. $a : T$

$\vdash a \in T$

13:wf..... NILNIL

$\vdash (\forall a, b:T. E(a,b) \Rightarrow E(b,a)) \in \mathbb{P}$

14:wf..... NILNIL

$\vdash (\forall a, b:T. E'(a,b) \Rightarrow E'(b,a)) \in \mathbb{P}$

15:wf..... NILNIL

$\vdash (\forall a, b, c:T. E(a,b) \Rightarrow E(b,c) \Rightarrow E(a,c)) \in \mathbb{P}$

16:wf..... NILNIL

$\vdash (\forall a, b, c:T. E'(a,b) \Rightarrow E'(b,c) \Rightarrow E'(a,c)) \in \mathbb{P}$

17:wf..... NILNIL

$\vdash (\lambda a.\forall b:T. E(a,b) \Rightarrow E(b,a)) \in T \rightarrow \mathbb{P}$

18:wf..... NILNIL

$\vdash (\lambda a.\forall b:T. E'(a,b) \Rightarrow E'(b,a)) \in T \rightarrow \mathbb{P}$

19:wf..... NILNIL

7. T

$\vdash T \in \text{Type}$

20:wf..... NILNIL

7. $a : T$

$\vdash (\lambda b.E(a,b) \Rightarrow E(b,a)) \in T \rightarrow \mathbb{P}$

21:wf..... NILNIL

7. $a : T$

$\vdash (\lambda b.E'(a,b) \Rightarrow E'(b,a)) \in T \rightarrow \mathbb{P}$

22:wf..... NILNIL

7. T

$\vdash T = T$

23:wf..... NILNIL

7. $a : T$

8. $b : T$

$\vdash E(a,b) \in \mathbb{P}$

24:wf..... NILNIL

7. $a : T$

8. $b : T$

$\vdash E'(a,b) \in \mathbb{P}$

25:wf..... NILNIL

7. $a : T$
 8. $b : T$
 $\vdash E(b,a) \in \mathbb{P}$
 26:wf..... NILNIL

7. $a : T$
 8. $b : T$
 $\vdash E'(b,a) \in \mathbb{P}$
 27:wf..... NILNIL

7. $a : T$
 8. T
 $\vdash a \in T$
 28:wf..... NILNIL

7. T
 8. $b : T$
 $\vdash b \in T$
 29:wf..... NILNIL

$\vdash (\lambda a.\forall b, c:T. E(a,b) \Rightarrow E(b,c) \Rightarrow E(a,c)) \in T \rightarrow \mathbb{P}$
 30:wf..... NILNIL

$\vdash (\lambda a.\forall b, c:T. E'(a,b) \Rightarrow E'(b,c) \Rightarrow E'(a,c)) \in T \rightarrow \mathbb{P}$
 31:wf..... NILNIL

7. $a : T$
 $\vdash (\lambda b.\forall c:T. E(a,b) \Rightarrow E(b,c) \Rightarrow E(a,c)) \in T \rightarrow \mathbb{P}$
 32:wf..... NILNIL

7. $a : T$
 $\vdash (\lambda b.\forall c:T. E'(a,b) \Rightarrow E'(b,c) \Rightarrow E'(a,c)) \in T \rightarrow \mathbb{P}$
 33:wf..... NILNIL

7. T
 8. T
 $\vdash T \in \text{Type}$
 34:wf..... NILNIL

7. $a : T$
 8. $b : T$
 $\vdash (\lambda c.E(a,b) \Rightarrow E(b,c) \Rightarrow E(a,c)) \in T \rightarrow \mathbb{P}$
 35:wf..... NILNIL

7. $a : T$
 8. $b : T$

$\vdash (\lambda c. E'(a,b) \Rightarrow E'(b,c) \Rightarrow E'(a,c)) \in T \rightarrow \mathbb{P}$
 36:wf..... NILNIL

7. T
 8. T
 $\vdash T = T$
 37:wf..... NILNIL

7. $a : T$
 8. $b : T$
 9. T
 $\vdash E(a,b) \in \mathbb{P}$
 38:wf..... NILNIL

7. $a : T$
 8. $b : T$
 9. T
 $\vdash E'(a,b) \in \mathbb{P}$
 39:wf..... NILNIL

7. $a : T$
 8. $b : T$
 9. $c : T$
 $\vdash (E(b,c) \Rightarrow E(a,c)) \in \mathbb{P}$
 40:wf..... NILNIL

7. $a : T$
 8. $b : T$
 9. $c : T$
 $\vdash (E'(b,c) \Rightarrow E'(a,c)) \in \mathbb{P}$
 41:wf..... NILNIL

7. $a : T$
 8. T
 9. T
 $\vdash a \in T$
 42:wf..... NILNIL

7. T
 8. $b : T$
 9. T
 $\vdash b \in T$
 43:wf..... NILNIL

7. T
 8. $b : T$

9. $c : T$
 $\vdash E(b,c) \in \mathbb{P}$
44:wf..... NILNIL

7. T
8. $b : T$
9. $c : T$
 $\vdash E'(b,c) \in \mathbb{P}$
45:wf..... NILNIL

7. $a : T$
8. T
9. $c : T$
 $\vdash E(a,c) \in \mathbb{P}$
46:wf..... NILNIL

7. $a : T$
8. T
9. $c : T$
 $\vdash E'(a,c) \in \mathbb{P}$
47:wf..... NILNIL

7. T
8. T
9. $c : T$
 $\vdash c \in T$
48:wf..... NILNIL

$\vdash ((\forall a:T'. E'(a,a))$
 $\& (\forall a, b:T'. E'(a,b) \Rightarrow E'(b,a))$
 $\& (\forall a, b, c:T'. E'(a,b) \Rightarrow E'(b,c) \Rightarrow E'(a,c)))$
 $=$
 $((\forall a:T'. E'(a,a))$
 $\& (\forall a, b:T'. E'(a,b) \Rightarrow E'(b,a))$
 $\& (\forall a, b, c:T'. E'(a,b) \Rightarrow E'(b,c) \Rightarrow E'(a,c)))$
49:

$\vdash ((\forall a:T. E'(a,a))$
 $\& (\forall a, b:T. E'(a,b) \Rightarrow E'(b,a))$
 $\& (\forall a, b, c:T. E'(a,b) \Rightarrow E'(b,c) \Rightarrow E'(a,c)))$
 $\iff ((\forall a:T'. E'(a,a))$
 $\& (\forall a, b:T'. E'(a,b) \Rightarrow E'(b,a))$
 $\& (\forall a, b, c:T'. E'(a,b) \Rightarrow E'(b,c) \Rightarrow E'(a,c)))$